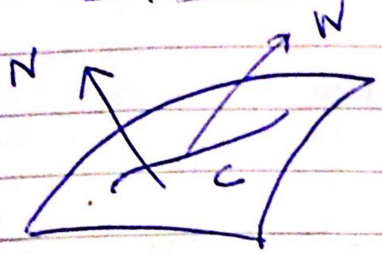
Υπενθύμιση:

- Συναλλοίωτη παράγωγος διανυσματικών πεδίων κατά μήκος καμπύλης



$$w(t) \in T_{c(t)}S, \ \forall t \in I$$

$$\frac{DW}{dt} = \left(\frac{DW}{dt}\right)^{\text{εφαπτ. συνιστώσα}}$$

$$= \frac{dW}{dt} - \left\langle \frac{dW}{dt}, N_{oc} \right\rangle N_{oc}$$

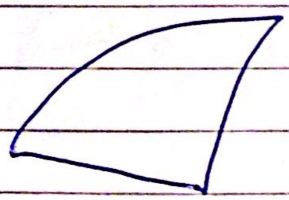
και

$$\frac{d}{dt}\langle V, W\rangle = \left\langle \frac{DV}{dt}, W \right\rangle + \left\langle V, \frac{dW}{dt} \right\rangle$$

- Παράλληλα διανυσματικά πεδία

W είναι $\underbrace{\text{παράλληλο}}_{\text{αυτός που ζει πάνω στην επιφάνεια δεν το βλέπει}} \iff \frac{DW}{dt} = 0$

- Γεωδαισιακές

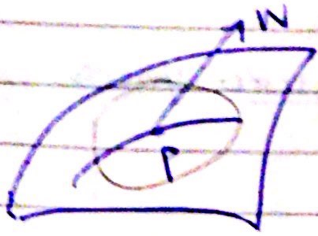


Μια καμπύλη $c: I \to S$ καλείται γεωδαισιακή της S αν-ν $\underbrace{\frac{Dc'}{dt} = 0}_{\text{δηλ. το διάνυσμα ταχύτητας είναι παράλληλο}}$.

Παρατήρηση: Αν c γεωδαισιακή $\Rightarrow \|c'\| = \text{σταθερό}$

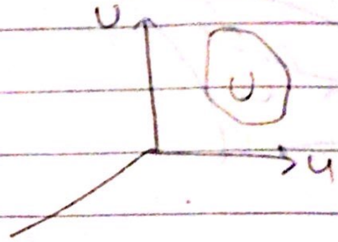
ΘΕΩΡΗΜΑ $\forall p \in S,\ w \in T_pS \setminus \{0\}$ υπάρχει μοναδική γεωδαισιακή

$$\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to S$$
$$\gamma(0) = p,\ \gamma'(0) = w$$



Πώς τη βρίσκουμε;

⇒ Παίρνουμε ένα σύστημα συντεταγμένων και λέμε ότι η $c(t) = X(u(t), v(t))$ είναι γεωδαισιακή

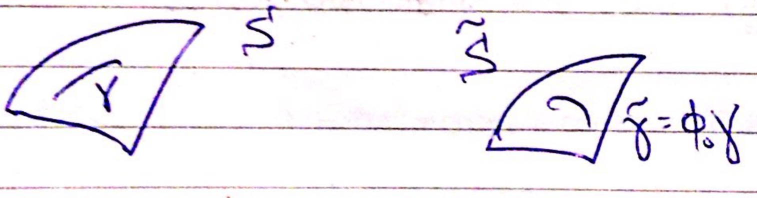


$$\Longleftrightarrow \begin{cases} u'' + \Gamma^1_{11}(u')^2 + \dots = 0 \\ v'' + \Gamma^2_{11}(u')^2 + \dots = 0 \end{cases}$$

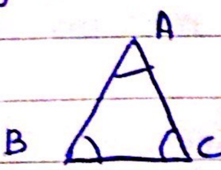
Έτσι τη βρίσκουμε (θεωρητικά).

⇝ Οι γεωδαισιακές είναι υπόθεση της έσωθεν γεωμετρίας.

Συμπέρασμα: Αν $\phi : S \to \tilde{S}$ είναι τοπική ισομετρία και $\gamma : I \to S$ γεωδαισιακή της S, τότε $\tilde{\gamma} = \phi \circ \gamma$ είναι γεωδαισιακή της $\tilde{S}$.

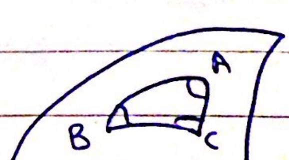


Γνωρίζουμε ότι στην Ευκλείδια γεωμετρία ισχύει:



$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = \pi$ (η οποία σχέση είναι ισοδύναμη με το αξίωμα της παραλληλίας)

Μπορούμε να πούμε κάτι αντίστοιχο για



;

Πριν ασχοληθούμε μ' αυτό, ας πάμε λίγο πιο βαθιά στη θεωρία των γεωδαισιακών

Θυμόμαστε ότι για τις ευθείες γνωρίζουμε ότι $K=0$.
Θέλουμε να βρούμε κάτι σχετικό κι εδώ

ΣΤΟΧΟΣ: Θέλουμε για καμπύλη $c: I \to S$ να ορίσουμε (γεωδαισιακή) καμπυλότητα K έτσι ώστε:

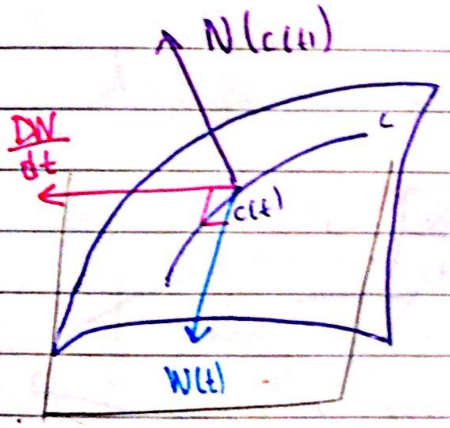
c γεωδαισιακή $\iff K=0$

Για να το κάνουμε αυτό, κάναμε την παρακάτω διαδικασία.

<u>Για διανυσματικά πεδία κατά μήκος καμπύλης:</u>

$$\frac{DW}{dt} = \left(\frac{dW}{dt}\right)^{\text{εφαπτ. συνιστώσα}} = \frac{dW}{dt} - \left\langle \frac{dW}{dt}, N\circ c \right\rangle N\circ c$$

ΥΠΟΘΕΣΗ: $\|W(t)\| = 1 \ \forall t$ ⇝ (αφού όλα αυτά που κάνουμε εκεί θα τα εφαρμόσουμε στο τέλος, το παίρνουμε δεδομένο για να διευκολύνουμε τη ζωή μας)



Είναι: $\langle W, W\rangle = 1 \Rightarrow \frac{d}{dt}\langle W, W\rangle = 0$

$$\Rightarrow 2\left\langle \frac{DW}{dt}, W\right\rangle = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{DW}{dt} \perp W}, \ (1)$$

Και επίσης ισχύει: $\boxed{\frac{DW}{dt} \perp N}, \ (2)$

Από τις (1) και (2) συμπεραίνουμε ότι: $\frac{DW}{dt} \parallel N \times W$

$\|N\times W\| = \|N\|\|W\| \sin\sphericalangle(N,W) = 1$

$\Rightarrow \exists\, \lambda(t): \dfrac{DW}{dt}(t) = \lambda(t)\big(N\circ c \times W\big)(t)$

δηλ. $\lambda: I \to \mathbb{R}$ ώστε $\dfrac{DW}{dt} = \lambda\, N\times W$ → δηλ. έχω ποσοτικοποιήσει την ενδεχόμενη παραλληλία του W

$$\Rightarrow \left\langle \frac{DW}{dt}, N\times W \right\rangle = \lambda \|N\times W\|^2$$

$$\Rightarrow \lambda = \left\langle \frac{DW}{dt}, N\times W \right\rangle = \left\langle \frac{dW}{dt}, N\times W \right\rangle$$

ΟΡΙΣΜΟΣ Έστω $c: I\to S$ καμπύλη και W μοναδιαίο εφαπτόμενο διανυσματικό πεδίο κατά μήκος της c. Η συνάρτηση $\lambda: I\to\mathbb{R}$ με $\lambda = \left\langle \dfrac{dW}{dt}, N\times W \right\rangle$ καλείται αλγεβρική τιμή της συναλλοίωτου παραγώγου του W και συμβολίζεται με $\left[\dfrac{DW}{dt}\right]$

δηλ. $\left[\dfrac{DW}{dt}\right] = \left\langle \dfrac{dW}{dt}, N\times W \right\rangle$

Επίσης, προφανώς ισχύει:

$$\frac{DW}{dt} = \left[\frac{DW}{dt}\right] N\times W$$

Παρατήρηση: Το W είναι παράλληλο $\Leftrightarrow \left[\dfrac{DW}{dt}\right] = 0$

→ Αν αλλάξω τον προσανατολισμό, δηλ. αντί του N βάλω το $-N$, τότε η αλγεβρική τιμή θα αλλάξει πρόσημο

$\Rightarrow$ άρα δεν είναι υπόθεση της έσωθεν γεωμετρίας

Γεωδαισιακή Καμπυλότητα Επιφανειακής Καμπύλης με παράμετρο το μήκος τόξου

$\Rightarrow \|c'\| = 1$

ΟΡΙΣΜΟΣ Έστω $c: I \to S$ καμπύλη με παράμετρο το s και S προσανατολισμένη. Η συνάρτηση $k_g: I \to \mathbb{R}$ με $k_g = \left[\frac{Dc'}{ds}\right]$ καλείται γεωδαισιακή καμπυλότητα της καμπύλης c.

$\boxed{\text{ΑΠΑΝΤΗΣΗ (ΠΡΟΣ ΤΟΝ ΣΤΟΧΟ):}}$ c γεωδαισιακή $\Leftrightarrow \frac{Dc'}{ds} = 0$

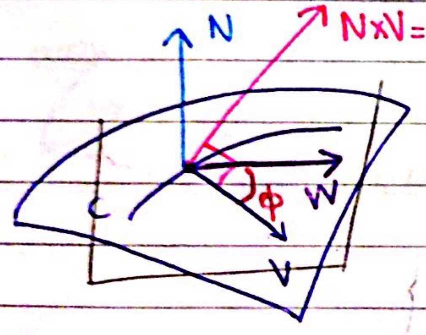
$\Leftrightarrow \left[\frac{Dc'}{ds}\right] = 0$

άρα $\Longleftarrow$ $\Leftrightarrow k_g = 0$

φτάσαμε τον στόχο.

Σημειώνουμε ότι $\left\{\right.$ Η k_g με αλλαγή προσανατολισμού αλλάζει πρόσημο.

Αλγεβρική Τιμή Συναλλοίωτου Παραγώγου



Έστω V, W μοναδιαία εφαπτομενικά διανυσματικά πεδία κατά μήκος της c.

$$\left[\frac{DV}{dt}\right] = \left\langle \frac{dV}{dt}, N \times V \right\rangle = \langle V', \underbrace{N \times V}_{= \bar{V}} \rangle$$

Στο σχήμα έχουμε αρχικά τα N, V και έπειτα βρίσκουμε το $N \times V$, το οποίο ονομάζουμε $\bar{V}$.

$$\left[\frac{DW}{dt}\right] = \langle W, N \times W \rangle$$

$\{V(t), \bar{V}(t)\}$ είναι ορθομοναδιαία βάση του $T_{c(t)}S$ $\forall t \in I$

(Τώρα στο σχήμα βάζουμε και το W)

Είναι: $W(t) = a(t)V(t) + b(t)\bar{V}(t)$

$\|W(t)\| = 1$

$\{V(t), \bar{V}(t)\}$ ορθοκανονική βάση $\Bigg\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{a^2(t) + b^2(t) = 1}$ → μας θυμίζει κάτι που είχαμε δει στο υποχρεωτικό μάθημα κι ένα λήμμα που είχαμε και στα παλιά μαθήματα.

$\Rightarrow \exists$ λεία συνάρτηση $\varphi : I \to \mathbb{R}$

με

$a(t) = \cos\varphi(t)$

$b(t) = \sin\varphi(t)$

$\varphi(t) = \measuredangle(V(t), W(t))$ (τώρα βάζουμε στο σχήμα και τη φ)

Με βάση τους συμβολισμούς που χρησιμοποιήσαμε μέχρι τώρα, θ' αποδείξουμε το λήμμα:

ΛΗΜΜΑ $\left[\frac{DW}{dt}\right] - \left[\frac{DV}{dt}\right] = \frac{d\varphi}{dt}$ → άρα βγάζουμε κάτι ανάλογο με αυτό που ξέρουμε (δε ξεχνάμε όμως ότι θέλουμε την παράλληλο όπως την ορίσαμε εδώ)

Απόδειξη

Είναι: $W = \cos\varphi V + \sin\varphi \bar{V}$

$N \times W = \cos\varphi N \times W + \sin\varphi N \times \overbrace{(N \times V)}^{= \bar{V}}$

$= \cos\varphi \bar{V} + \sin\varphi \{ \langle N, V\rangle \times N - \langle N, N\rangle V \}$

$\langle N, V\rangle$ → 0 αφού κάθετα

$= -\sin\varphi V + \cos\varphi \bar{V}$

(εδώ: $J : T_{c(t)}S \to T_{c(t)}S$ με $JV = \bar{V}$)

↓ αντίστοιχο με τη στροφή που είχαμε δει στο υποχρεωτικό

$$\left[\frac{DW}{dt}\right] = \langle W', -\sin\phi V + \cos\phi \bar{V}\rangle$$

$$= \langle -\phi' \sin\phi V + \cos\phi V' + \phi'\cos\phi \bar{V} + \sin\phi \bar{V}', -\sin\phi V + \cos\phi \bar{V}\rangle$$

0 γιατί $\langle V,V\rangle = 1 \Rightarrow 2\langle V,V'\rangle = 0$

$$= \phi' \sin^2\phi - \cos\phi\sin\phi\langle V',V\rangle + \cos^2\phi\langle V',\bar{V}\rangle + \phi'\cos^2\phi - \sin^2\phi\langle \bar{V}',V\rangle + \sin\phi\cos\phi\langle \bar{V}',\bar{V}\rangle$$

0 αφού $\langle \bar{V},\bar{V}\rangle = 1 \Rightarrow 2\langle \bar{V}',\bar{V}\rangle = 0$

$$= \phi' + \cos^2\phi\langle V',\bar{V}\rangle + \sin^2\phi\langle V',\bar{V}\rangle$$

αφού $\langle V,\bar{V}\rangle = 0$ $\Rightarrow \langle V',\bar{V}\rangle + \langle V,\bar{V}'\rangle = 0$ ~ δηλ. το ένα το αντίθετο του άλλου

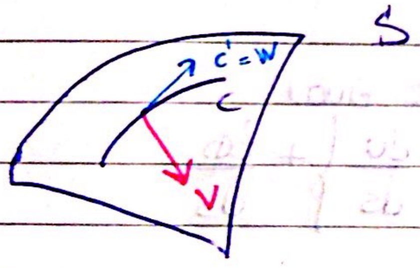
$$= \phi' + \langle V',\bar{V}\rangle$$

$$= \phi' + \left[\frac{DV}{dt}\right]$$

$$\Rightarrow \boxed{\left[\frac{DW}{dt}\right] - \left[\frac{DV}{dt}\right] = \phi'} \quad \text{όπου } \phi = \measuredangle(V,W)$$

Πάμε πίσω να δούμε την αντιστοιχία με την κλασική κατάσταση.

Ορίζουμε ότι για την γεωδαισιακή καμπυλότητα έχουμε:



$c: I \to S$ με παράμετρο το μήκος τόξου

$$K_g = \left[\frac{Dc'}{ds}\right]$$

→ μπορούμε να θεωρήσουμε τέτοιο V αφού είχαμε δείξει στο προηγούμενο μάθημα ότι υπάρχουν άπειρα τέτοια

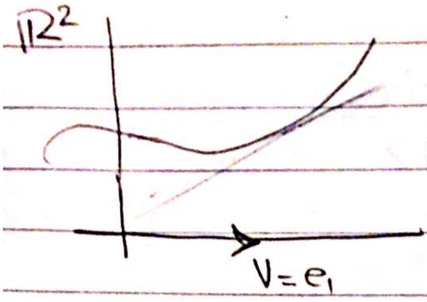
Έστω V μοναδιαίο παράλληλο διανυσματικό πεδίο κατά μήκος της c.

$$\left[\frac{DV}{ds}\right] = 0$$

Τώρα εφαρμόζουμε το λήμμα.

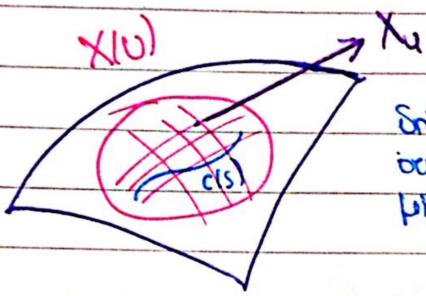
$$\left[\frac{Dc'}{ds}\right] - \left[\frac{DW}{ds}\right] = \frac{d\phi}{ds}, \quad \phi = \measuredangle(V,c')$$

Συμπέρασμα: $\boxed{K_g = \dfrac{d\phi}{ds}}$, $\phi = \sphericalangle(v, c')$



Για να βρω κάποιους τύπους της K_g δεν μπορώ να δουλέψω με καρτεσιανές συντεταγμένες. Πρέπει να θεωρήσω σύστημα συντεταγμένων.

Έστω $X : U \to S$ σύστημα συντεταγμένων του προσανατολισμού της S με παραμέτρους u, v.



δηλ. υποθέτουμε ότι η c είναι μέσα στο X(U).

Έστω ότι το σύστημα X είναι ορθογώνιο, δηλ. $F = 0$

$c(s) = X(u(s), v(s))$

Ισχύει η εξής πρόταση:

ΠΡΟΤΑΣΗ Η γεωδαισιακή καμπυλότητα της c είναι:

$$K_g = \frac{1}{2\sqrt{EG}} \left\{ G_u \frac{dv}{ds} - E_v \frac{du}{ds} \right\} + \frac{d\phi}{ds}$$

όπου $\phi(s) = \sphericalangle(\underbrace{X_u, c'(s)}_{\text{μοναδιαία παράλληλα διανυσματικά πεδία}})$.

ουσιαστικά αυτή είναι η σχέση που χρειαζόμαστε για να υπολογίσουμε την K_g

αν ολοκληρώσουμε θα δούμε κάποια σχέση με το έξοχο θεώρημα.